NAJBOLJA KUTIJA

Andrea Belamarić, Marin Belamarić, Adrijan Cvijanović, Ida Kolmanić, David Mikulčić, Karlo Priselac, Andrija Tomorad[1]

Oduvijek smo se pitali zašto su kutije u obliku kvadra. Htjeli smo istražiti je li oblik kvadra zaista najprikladniji za pakiranje. Cilj našega projekta bio je pronaći geometrijsko tijelo što većeg volumena za zadano oplošje. Prvo smo pokušali otkriti koji geometrijski lik ima što veću površinu za zadani opseg. To je kao da postavite pitanje: Vi i vaš stric naslijedili ste zemlju pa sada on, budući da je stariji, smatra da ima veće pravo na nju, stoga vam daje 100 m ograde kojom morate ograditi dio zemlje koju želite posjedovati. Kako ćete dobiti što više zemlje?

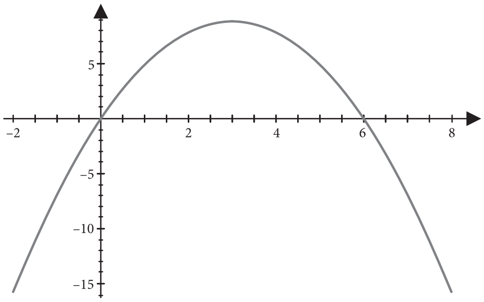
Odmah nam je napamet pao pravokutnik pa samo razmišljali koliki bi trebao biti omjer stranica. Ako je a duljina stranice, opseg označimo s o i površinu s P.

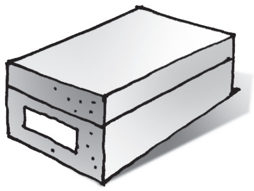
Kvadratna funkcija površine za zadani opseg o je $P(a)=\dfrac{a(o-2a)}{2}$.

Funkcija ima najveću vrijednost za

$$a=\frac{o}{4}$$

što pokazuje da je površina najveća za kvadrat. Na slici je graf funkcije P za $o = 12$.





Razmišljali smo postoji li lik prikladniji od kvadrata i sjetili se ostalih pravilnih mnogokuta. Računajući površine pravilnog trokuta, četverokuta, šesterokuta i osmerokuta s jednakim opsegom, došli smo do zaključka da površina raste porastom broja stranica. Zaključili smo da će najveću površinu imati mnogokut s beskonačno mnogo stranica, tj. krug.

Površina pravilnog mnogokuta s n stranica duljine a jednaka je

$$P_n=\frac{na^2}{2t}$$

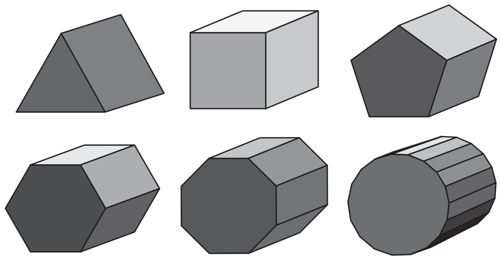
[1]Članak je nastao kao rezultat projekta/radionice Ljetnog kampa mladih matematičara održanog u kolovozu 2015. godine u Fužinama pod mentorstvom Vlatke Vazdar

pri čemu je t tangens polovine središnjeg kuta mnogokuta. Očito je površina mnogokuta veća kad je t manji, odnosno karakteristični trokut mnogokuta sve tanji.

No, naše istraživanje još nije gotovo. Sada želimo otkriti koje geometrijsko tijelo za zadano oplošje ima najveći volumen. Počeli smo s pravilnim prizmama. Volumen n-strane pravilne prizme visine h i duljine stranice baze a je:

$$V = P_n h.$$

Kao kod mnogokuta, zaključujemo da je volumen veći kad mnogokut koji je baza ima sve tanji karakteristični trokut.



Računali smo volumen pravilne trostrane, četverostrane i šesterostrane prizme za neko zadano oplošje. Zbog većih površina mnogokuta s više stranica, pretpostavili smo da će veći volumen imati prizme s više strana. Ako je zadano oplošje trostrane prizme

$$O = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

i tražimo prizmu s najvećim volumenom

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h,$$

uvrštavanjem h iz prvog izraza dobivamo

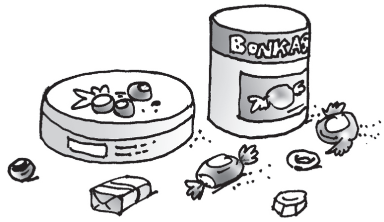
$$V(a) = \frac{a\sqrt{3}}{12}\left(O - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Kad nacrtamo funkciju $V(a)$, vidimo da ima najveću vrijednost ako je $O = \frac{9a^2}{2\sqrt{3}}$. Uvrštavanjem O u jednakost $O = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ dobivamo vezu $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Slično za četverostranu prizmu krećemo od $O = 4ah + 2a^2$ i $V = a^2h$.

Uvrštavanjem oplošja u volumen dobivamo funkciju $V(a) = \frac{a}{4}\left(O - 2a^2\right)$ koja ima najveću vrijednost za $O = 6a^2$, što je očito kocka. Dakle, za $h = a$ volumen je najveći.

Za šesterostranu prizmu pomoću $O = 6ah + 3\sqrt{3}a^2$, $V = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}h$. Na analogan način dobivamo $h = \sqrt{3}a$.



Došli smo do zaključka da je najpravilnija „prizma” zapravo valjak. No imali smo još jedan problem. Na odnos oplošja i volumena utječe i omjer visine te duljina brida baze. Primijetili smo da je u svakome od ova tri slučaja visina jednaka promjeru kružnice upisane u bazu, a najpovoljniji valjak ima visinu jednaku promjeru baze. Promatrali smo i Platonova tijela kojima su sve strane pravilni mnogokuti. Istim postupkom kao i kod prizmi došli smo do istog zaključka. Gledali smo tetraedar (tijelo s četiri plohe oblika trokuta), heksaedar (kocka) i dodekaedar (dvanaest peterokutnih ploha). Porastom broja strana Platonova tijela sve više sliče kugli, pa smo pretpostavili da kugla ima još „bolji” odnos oplošja i volumena.

Sada je vrijeme za veliko finale: kugla i valjak! Zadali smo volumen i izračunali oplošje kugle i valjka. Oplošje kugle je, očekivano, bilo manje. Zaključujemo da je kugla naša najbolja kutija! Zašto se onda nikada ne izrađuju kutije oblika kugle?!